УДК 514.75

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА КОЛЛИНЕАЦИЙ ПРОЕКТИВНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Н.В.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Исследуются двупараметрические семейства Π_2 коллинеаций $\pi : \mathfrak{P}_2 \to P_2$ проективных плоскостей, отображающих заданную точку $P^\circ \in \mathfrak{P}_2$ в заданную точку $p^\circ \in P_2 : \pi(P^\circ) = p^\circ$, причем точки P° и p° описывают двумерные области. Получено уравнение фокальной кривой коллинеации $\pi \in \Pi_2$ и найдена геометрическая характеристика четырех точек, составляющих индикатрису ассоциированного точечного отображения $\varphi : P_2 \ni P^\circ \to p^\circ \in P_2$. Построен канонический репер семейства Π_2. Рассмотрен подкласс Π_2° со специальными свойствами ассоциированных геометрических образов.

Отнесем плоскости $\mathfrak{P}_2$ и P_2 к подвижным реперам $R=\{A_0, A_1, A_2\}$ и $r = \{a_0, a_1, a_2\}$, где $A_0 = P^\circ$, $a_0 = p^\circ$. Тогда коллинеация π и система пфаффовых уравнений семейства Π_2 запишутся в виде [1, с.51]:

$$x^i = \frac{M^i_J X^J}{1 - P_J X^J} \qquad (i, j, k, J, \mathcal{J}, K = 1,2), \tag{1}$$

$$\omega^i = \lambda^i_J \Omega^J, \ \nabla M^i_J = M^i_{JK} \Omega^K, \ \nabla P_J + \Omega^0_J - M^K_J \omega^0_K = P_{JK} \Omega^K, \tag{2}$$

где x^i, X^J – неоднородные проективные координаты соответствующих точек и используются обозначения

$$\begin{cases} \omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0, \ \Omega^J \overset{def}{=} \Omega^J_0, \ \nabla M^i_J = dM^i_J - M^i_K \Omega^K_J + M^K_J \omega^i_K + M^i_J (\Omega^0_0 - \omega^0_0), \\ \nabla P_J = dP_J - P_K \Omega^K_J + P_J \Omega^0_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\det(\lambda^i_J) \neq 0, \qquad \det(M^i_J) \neq 0. \tag{4}$$

Обозначим:

$$\tilde{\lambda}^i_K = M^i_K - \lambda^i_K, \quad \tilde{\lambda} = \det(\tilde{\lambda}^i_K) \tag{5}$$

Рассмотрим общий случай, когда тензор $\tilde{\lambda}^i_K$ – невырожденный, т.е. $\tilde{\lambda} \neq 0$. Тогда существует взаимный тензор $\overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^J_i$ такой, что

$$\overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^K_i \tilde{\lambda}^i_H = \delta^K_H, \qquad \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^J_i \lambda^K_J = \delta^K_i. \tag{6}$$

Положим:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^J_i \left(P_J - \frac{1}{n+1} \overset{*}{\lambda}{}^K_j \lambda^j_{KJ}\right), \\ N_i &= \overset{*}{\tilde{\lambda}}{}^J_i \left(P_J - \frac{1}{n+1} \overset{*}{M}{}^K_j M^j_{KJ}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

В [2] показано, что на плоскостях P_2 и $\mathfrak{P}_2$ определены однопараметрические семейства инвариантных прямых, не проходящих соответственно через точки a_0 и A_0, т.е. пучок нормалей $\nu_{(\sigma)}$ и $N_{(\sigma)}$:

$$(\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i)) x^i + 1 = 0, \tag{8}$$

$$(\nu_i M^i_J - P_J + \sigma(N_i - \nu_i) M^i_J) X^J + 1 = 0. \tag{9}$$

Фокальные точки и фокальные семейства коллинеации $\pi \in \Pi_2$ определяются [1, с.56] системой уравнений

$$f^i = 0, \quad f^i_K \Omega^K = 0, \tag{10}$$

где

$$\begin{cases} f^i = M^i_J X^J + x^i (P_J X^J - 1), \\ f^i_K = P_{JK} x^i X^J + (M^i_{JK} - \lambda^i_K P_J) X^J - x^i P_K - \tilde{\lambda}^i_K. \end{cases} \tag{11}$$

Обозначим:

$$\begin{cases} a^i_{\varkappa H J} = P_{J\varkappa} M^i_H + P_H M^i_{J\varkappa}, \\ b^i_{\varkappa J} = M^i_{J\varkappa} + P_J \left(M^i_\varkappa - 2\lambda^i_\varkappa\right) \end{cases} \qquad (12)$$

Исключая из уравнений (10) формы $\Omega^\varkappa$ и координаты x^i, получим на плоскости $\mathcal{P}_2$ инвариантную кривую четвертого порядка

$$a_{J\varkappa L H} X^J X^\varkappa X^L X^H + b_{J\varkappa L} X^J X^\varkappa X^L + c_{J\varkappa} X^J X^\varkappa + h_J X^J + \tilde{\lambda} = 0 \qquad (13)$$

– фокальную кривую коллинеации $\pi \in \Pi_2$. Здесь

$$\begin{cases} a_{J\varkappa L H} = a^1_{1HJ}\, a^2_{2\varkappa L} - a^2_{1\varkappa L}\, a^1_{2HJ}, \\ b_{J\varkappa L} = b^1_{1J}\, a^2_{2\varkappa L} - b^1_{2J}\, a^2_{1\varkappa L} + b^2_{2\varkappa}\, a^1_{1LJ} - b^2_{1\varkappa}\, a^1_{2LJ}, \\ c_{J\varkappa} = \tilde{\lambda}^1_2\, a^2_{1\varkappa J} + \tilde{\lambda}^2_1\, a^1_{2\varkappa J} - \tilde{\lambda}^2_2\, a^1_{1\varkappa J} - \tilde{\lambda}^1_1\, a^2_{2\varkappa J} + b^1_{1J} b^2_{2\varkappa} - b^1_{2J} b^2_{1\varkappa}, \\ h_J = \tilde{\lambda}^1_2 b^2_{1J} + \tilde{\lambda}^2_1 b^1_{2J} - \tilde{\lambda}^1_1 b^2_{2J} - \tilde{\lambda}^2_2 b^1_{1J}. \end{cases} \qquad (14)$$

Поместим вершины a_i репера в p_2 на нормализующую прямую $\nu_{(\sigma)}$, т.е. прямую (8). Тогда

$$\nu_i + \sigma(N_i - \nu_i) = 0. \qquad (15)$$

Известно [3],[4], что для нормализованной плоскости P_2 фундаментальный объект $\Gamma_2 = \{\lambda^i_J, \lambda^\varkappa_{\varkappa L}\}$ определяет для любой фиксированной точки $A_0 \in \mathcal{P}_n$ инвариантное алгебраическое многообразие размерности нуль, называемое индикатрисой $\mathcal{J}$ отображения $\varphi: P_2 \ni A_0 \to a_0 \in p_2$.

Уравнения индикатрисы $\mathcal{J}$ в однородных координатах $\tilde{X}^{J'}$ ($J' = 0,1,2$) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda^1_{11}(\tilde{X}^1)^2 + 2\lambda^1_{12}\tilde{X}^1\tilde{X}^2 + \lambda^1_{22}(\tilde{X}^2)^2 - 2\lambda^1_1\tilde{X}^1\tilde{X}^0 - 2\lambda^1_2\tilde{X}^2\tilde{X}^0 = 0, \\ \lambda^2_{11}(\tilde{X}^1)^2 + 2\lambda^2_{12}\tilde{X}^1\tilde{X}^2 + \lambda^2_{22}(\tilde{X}^2)^2 - 2\lambda^2_1\tilde{X}^1\tilde{X}^0 - 2\lambda^2_2\tilde{X}^2\tilde{X}^0 = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Для построения геометрически фиксированного репера

$R_\sigma = \{A_0, A_1, A_2\}$ семейства Π_2 поместим точки A_1 и A_2 на индикатрису $\mathcal{J}$. Из (16) следует:

$$\lambda^1_{11} = 0, \quad \lambda^1_{22} = 0, \quad \lambda^2_{11} = 0, \quad \lambda^2_{22} = 0. \qquad (17)$$

Система (16) в неоднородных координатах запишется в виде:

$$\lambda^1_{12}X^1X^2 - \lambda^1_1X^1 - \lambda^1_2X^2 = 0, \quad \lambda^2_{12}X^1X^2 - \lambda^2_1X^1 - \lambda^2_2X^2 = 0. \qquad (18)$$

Обозначим через T_i линию, описанную точкой A_0 при $\Omega^j = 0$ ($i \neq j$), т.е. линию с касательной A_0A_i. В силу (17) линии T_1 и T_2 инвариантные. Пусть $t_1 = \varphi \circ T_1$, $t_2 = \varphi \circ T_2$ – соответствующие им линии на плоскости p_2. Расположим вершины a_i на касательных к линиям t_i, т.е. в точках пересечения нормали $\nu_{(\sigma)}$ с этими касательными. Тогда оба репера $R_\sigma = \{A_0, A_1, A_2\}$ и $r_\sigma = \{a_0, a_1, a_2\}$ станут геометрически фиксированными, причем

$$\lambda^1_2 = 0, \quad \lambda^2_1 = 0. \qquad (19)$$

В силу неравенств (3) можно так пронормировать вершины реперов R_σ и r_σ, чтобы

$$\lambda^1_1 = 1, \quad \lambda^2_2 = 1. \qquad (20)$$

Система (18) приводится к виду:

$$X^1(\lambda^1_{12}X^2 - 1) = 0, \quad X^2(\lambda^2_{12}X^1 - 1) = 0. \qquad (21)$$

Следовательно, индикатриса $\mathcal{J}$ отображения φ состоит из точек A_0, A_1, A_2 и точки

$$B = \lambda^1_{12}\lambda^2_{12}A_0 + \lambda^1_{12}A_1 + \lambda^2_{12}A_2, \qquad (22)$$

причем

$$\lambda^1_{12}\,\lambda^2_{12} \neq 0. \qquad (23)$$

Учитывая (23), дальнейшую нормировку вершин реперов R_σ и r_σ осуществим так, чтобы

$$\lambda^1_{12} = 1, \quad \lambda^2_{12} = 1 \qquad (24)$$

Построенные реперы назовем реперами R_σ^0 и τ_σ^0. Тогда

$$B = A_0 + A_1 + A_2, \tag{25}$$

т.е. точка B – единичная точка репера R_σ^0 и направление

$$\Omega^1 - \Omega^2 = 0 \tag{26}$$

на плоскости $\mathcal{P}_2$ имеет инвариантный смысл.

Продолженная система уравнений Пфаффа семейства Π_2 в репере R_σ^0 принимает вид:

$$\begin{cases} \omega^i = \Omega^i, \ \omega_i^j - \Omega_i^j = \Omega^j, \ \Omega_0^0 - \Omega_i^i + \omega_i^i - \omega_0^0 = \Omega^j, \\ \Omega_i^0 - \omega_i^0 - \Omega_i^j = \frac{1}{2}\lambda_{iiK}^i \Omega^K, \ 2\Omega_i^j + \lambda_{iiK}^j \Omega^K = 0, \\ \Omega_i^0 - \omega_i^0 + \omega_i^j + 2\Omega_0^0 - \Omega_i^i - \Omega_j^j + \omega_j^j - \omega_0^0 = \lambda_{ijK}^j \Omega^K, \\ \nabla M_J^i = M_{JK}^i \Omega^K, \ \nabla M_{JK}^i + M_{(J}^i \Omega_{K)}^0 - M_J^{(i} M_K^{K)} \omega_K^0 = M_{JKL}^i \Omega^L, \end{cases} \tag{27}$$

где $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Если условие $\tilde{\lambda} \neq 0$ не выполнено, то нормалей $N_{(\sigma)}$ и $V_{(\sigma)}$ построить нельзя, но возможно осуществлять канонизацию реперов R и τ другим способом. Рассмотрим один подкласс таких семейств.

О п р е д е л е н и е 1. Семейством Π_2^0 называется семейство Π_2, удовлетворяющее условиям:

$$\tilde{\lambda}_J^i \equiv M_J^i - \lambda_J^i = 0. \tag{28}$$

Для семейства Π_2^0 канонизацию репера $R = \{A_J\}$ осуществим следующим образом:

$$\begin{cases} M_J^i = \lambda_J^i = \delta_J^i, & M_{JJ}^i = \lambda_{JJ}^i = 0, \\ M_{12}^i = M_{21}^i = 1, & \lambda_{12}^i = \lambda_{21}^i = 1. \end{cases} \tag{29}$$

Формулы (12) запишутся в виде:

$$\begin{cases} a_{KHJ}^i = P_{JK}\delta_H^i + P_H(1 + \delta_K^i P_J - \delta_K^J) \\ b_{KJ}^i = 1 - \delta_K^J - P_J\delta_K^i - P_K\delta_J^i. \end{cases} \tag{30}$$

Из (14) находим:

$$\begin{cases} k_J = 0, \quad c_{KK} = 2P_K(P_K - 1), \\ C_{JK} = 4P_J P_K - (1 - P_J)(1 - P_K), \quad J \neq K. \end{cases} \tag{31}$$

Уравнение (13) фокальной кривой на плоскости $\mathcal{P}_2$ приводится к виду:

$$(a_{JKLH} X^H X^L + b_{JKL} X^L + c_{JK}) X^J X^K = 0. \tag{32}$$

Следовательно, для семейства Π_2^0 точка A_0 является двойной фокальной точкой. Из (31) следует, что существует два и только два подкласса семейства Π_2^0 с тройной фокальной точкой A_0: семейство $\Pi_{2,1}^0$, характеризуемое условиями $P_1 = 0, P_2 = 1$, и семейство $\Pi_{2,2}^0$, характеризуемое условиями $P_2 = 0, P_1 = 1$. Семейство $\Pi_{2,1}^0$ определяется системой уравнений Пфаффа (27) и уравнениями:

$$\Omega_1^0 - \omega_1^0 - \Omega_1^2 = P_{1K}\Omega^K, \ \Omega_2^0 - \omega_2^0 - \Omega_2^2 + \Omega_0^0 = P_{2K}\Omega^K. \tag{33}$$

Замена в них индексов $1 \leftrightarrow 2$ приводит к уравнениям семейства $\Pi_{2,2}^0$. Прямые $A_0 A_J$ канонического репера $R^0 = \{A_0, A_1, A_2\}$ семейства $\Pi_{2,i}^0$ пересекают фокальную кривую

$$(a_{JKLH} X^H X^L + b_{JKL} X^L) X^J X^K = 0 \tag{34}$$

в точке A_0 и точке

$$B_J^{(i)} = a_{JJJJ}^{(i)} A_0 - b_{JJJ}^{(i)} A_J. \tag{35}$$

Таким образом, в плоскости $\mathcal{P}_2$, ассоциированной с семейством

$\Pi^{\circ}_{2,1}$ ($\Pi^{\circ}_{2,2}$), определены две инвариантные точки $B^{(1)}_1, B^{(1)}_2$ ($B^{(2)}_1, B^{(2)}_2$). Если $a^{(i)}_{7777}=0$, то точка $B^{(i)}_{7}$ лежит на индикатрисе (21); если $B^{(i)}_{777}=0$, то она совпадает с точкой A_0.

Библиографический список

1. Малаховский Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.50-57.

2. Малаховский Н.В. Нормализации проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций // Там же. 1990. Вып.21. С.50-56.

3. Рыжков В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.235-242.

4. Андреев Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n$ $(m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Вып.18. С.5-9.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА E_n

Г.Матиева

(Омский педагогический институт)

В работе изучается частичное отображение евклидова пространства E_n, порождаемое заданным семейством гладких линий.

В области Ω евклидова пространства E_n задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $x \in \Omega$ проходит одна линия этого семейства. Пусть область Ω отнесена к подвижному ортонормированному реперу $R=(x, \vec{e}_i)$ $(i,j,k=1,2,\dots,n)$, который является репером Френе [1] для линии ω^1 заданного семейства. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega^k_i \vec{e}_k. \tag{1}$$

Формы ω^i, ω^k_i удовлетворяют условиям:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \ \mathcal{D}\omega^k_i = \omega^\ell_i \wedge \omega^k_\ell, \ \omega^j_i + \omega^i_j = 0. \tag{2}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i$ образуют сеть Френе Σ_n. Так как репер R построен на касательных к линиям сети Σ_n, имеем:

$$\omega^k_i = \Lambda^k_{ij}\,\omega^j \quad (\Lambda^k_{ij} = -\Lambda^i_{kj}), \tag{3}$$

$$\Lambda^j_{i1} = 0 \ (i<j;\ i=1,2,\dots,n-2;\ j=3,4,\dots,\widehat{i+1},\dots,n), \tag{4}$$

$$\Lambda^{i+1}_{i1} \neq 0 \quad (i=1,2,\dots,n-2). \tag{5}$$

Здесь знаком $\wedge$ сверху отмечено непринимаемое определенным индексом значение.

Псевдофокус F^1_2 касательной $(x, \vec{e}_2)$ к линии ω^2 сети Σ_n определяется следующим радиус-вектором:

$$\vec{F}^1_2 = \vec{x} - \frac{1}{\Lambda^1_{21}}\vec{e}_2, \tag{6}$$

где $\Lambda^2_{11} = -\Lambda^1_{21}$ — первая кривизна кривой ω^1 заданного семейства. Когда точка x описывает область Ω, псевдофокус F^1_2 описывает свою область $\overline{\Omega}$. Получим отображение $f: \Omega \to \overline{\Omega}$ такое, что $f(x) = F^1_2$.

Дифференцируя внешним образом равенство (3) и применяя лемму Картана, получим:

$$d\Lambda^k_{ij} = \Lambda^k_{ijt}\,\omega^t,$$

где

$$\Lambda^k_{ijt} = \Lambda^k_{ijt} + \Lambda^k_{i\ell}\Lambda^\ell_{jt} + \Lambda^k_{\ell j}\Lambda^\ell_{it}.$$

Дифференцируя равенство (6) обычным образом, имеем:

$$d\vec{F}^1_2 = \omega^i \vec{a}_i,$$